

Métodos para el cálculo de la Función Descriptiva en sistemas dinámicos no lineales

Gerónimo Bellasai, Luciano Ferrari

Laboratorio de Electrónica Digital
Universidad Católica
"Nuestra Señora de la Asunción"
Po. Box 1718
Asunción - Paraguay
email: lferrari@ledip.py

Un capítulo importante de la teoría de sistemas es, sin duda, la dedicada a sistemas dinámicos no lineales. Este estudio es de gran interés, sobre todo en el modelado de sistemas y resolución de problemas de control.

Se puede decir que las problemáticas ligadas al análisis de sistemas de control no lineales hacen parte de un conjunto de problemas todavía abiertos. Sin embargo, no existe hasta ahora una teoría sólida en grado de dar respuestas exactas a todos los aspectos de estas problemáticas. El método de la Función Descriptiva (FD) se coloca en este contexto, y en particular constituye una herramienta aproximada, de tipo heurístico, para la búsqueda de oscilaciones permanentes. El trabajo hecho tiene como objetivo encontrar de manera rápida y eficiente la FD como primer paso para la implementación de programas de simulación relativos a un sistema hecho.

1. Introducción

Informalmente, la Función Descriptiva (FD) se puede ver como una especie de función de transferencia para sistemas no lineales. Este método permite entender cuales son los factores que determinan, por ejemplo, la existencia y la estabilidad de las oscilaciones en los sistemas realimentados; la importancia y los límites de sus interconexiones.

La FD entonces puede ser de gran importancia para la comprensión de importantes fenómenos no lineales de los sistemas de control y en la síntesis de controladores no lineales.

No existen métodos generales y directos para el cálculo de la FD a partir de las ecuaciones de estado y de salida de un determinado sistema. La única metodología existente está basada en el concepto de cálculo numérico de la respuesta periódica del sistema solicitado con un ingreso sinusoidal.

En el caso de que la respuesta sea única y asintóticamente estable, el método más simple para el cálculo (en un punto) de la FD se puede describir como sigue:

1. Simulación del sistema, con un adecuado algoritmo de integración numérica, a partir de condiciones iniciales arbitrarias, bajo la acción de un ingreso sinusoidal de amplitud y frecuencias conocidas:

$$u(t) = U \sin(\Omega t)$$

2. Espera de la correspondiente condición de régimen permanente (periódico).
3. Cálculo del primer armónico de la respuesta periódica :

$$y(t) = Y \sin(\Omega t + \alpha)$$

4. Cálculo de la FD en función de (U, Ω) :

$$D(U, \Omega) = \frac{Y}{U} e^{j\alpha}$$

Volviendo a repetir el procedimiento para distintos valores de U y Ω , se obtiene la representación por puntos de la FD. Se puede proceder con posteriores análisis por medio de técnicas de interpolaciones (polinomiales, spline cúbicas, etc).

En este esquema, la segunda fase es la más engorrosa: la espera "espontánea" de un régimen periódico. El esfuerzo de este trabajo es el de reducir el tiempo de llegada del sistema al régimen permanente.

Definición del problema implementado.

El sistema dinámico no lineal tomado en consideración es el que describe el movimiento de un péndulo simple:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \sin(x_1) - h x_2 + \text{Amp} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Medios computacionales.

El trabajo se ha desarrollado en ambiente Apple/Vax. Se utilizó a tal fin, las funciones de integración de la aplicación Mathematica de Wolfran Resource Inc. Dicha aplicación tiene un "front end" en el ambiente Macintosh y el "kernel" de cálculo en ambiente Vax.

El tipo de ambiente de cálculo numérico usado no es esencial, ya que solo se quiere demostrar la viabilidad de algunas hipótesis que a posteriori se podrían implementar con herramientas más poderosas.

2. Solución Banal

Introducción

En el caso considerado de un péndulo simple, se logra el régimen después de muchas decenas de períodos con tiempos de cálculo del orden de la hora si al sistema, a partir de una condición inicial arbitraria, se lo deja evolucionar hasta su estado de oscilación permanente.

El problema, entonces, no está en encontrar nuevos medios de cálculo o más eficientes algoritmos de integración numérica, sino en individualizar métodos computacionalmente eficientes para el cálculo de la respuesta periódica. De este modo, sistemas intrínsecamente lentos pueden, a veces, evolucionar con trayectorias distintas de las "naturales".

Este tipo de metodología es, de todos modos, necesaria para tener un punto de referencia.

Definiciones teóricas

El método "banal" consiste en definir primeramente determinadas condiciones iniciales relativas al tiempo, a la posición angular y velocidad angular (X_1, X_2). En segundo lugar, se integra repetidamente la ecuación del péndulo real representada por el sistema, hasta alcanzar el régimen periódico. La primera interrogante que surge se refiere a la condición de régimen, es decir, ¿cuándo se puede afirmar haber llegado a la condición final?

Para contestar a esta pregunta tenemos la necesidad de hacer referencia a la definición de "norma" de un vector \underline{X} .

Definición 2.1: Norma esférica

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2}$$

Definición 2.2: Distancia entre dos estados

La distancia entre dos estados la podemos entonces definir como la norma de la diferencia de los respectivos vectores.

Definición 2.3: Condición de régimen

El estado inicial se considera igual al estado final obtenido después de un período, cuando la distancia entre los dos estados es tal que:

$$\|\bar{x}(T) - \bar{x}(0)\| \leq \varepsilon$$

En la práctica, considerando que se dispone del resultado de la integración expresada puntualmente, el valor ε tiene que ser una fracción de la máxima distancia entre dos puntos cualquiera del movimiento de estados durante el período T . Una idea gráfica de esta definición podría ser la de figura 2.1.

3. Método de reinicialización mediante aproximación lineal

Introducción

La primera solución al problema definido arriba se denomina " *Método de reinicialización mediante aproximación lineal*". Este método, bajo la acción del ingreso sinusoidal, preve la búsqueda de una condición inicial que permita al estado del sistema llegar, en un período, a la condición de régimen periódico, es decir, cumplir una trayectoria cerrada. La idea central es calcular antes de cada nueva integración, la condición inicial aprovechando toda la información contenida en la última iteración. Para ello, se necesita linealizar el sistema en el entorno de duración de un período y se usará la matriz de monodromía para determinar la nueva condición inicial. Se repite el procedimiento hasta llegar a la condición de régimen .

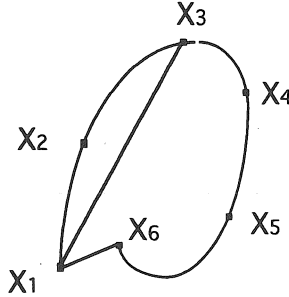


Figura 2.1

Tratado teórico

Introducimos unos conceptos para la comprensión de lo que se trata a continuación. Dado un sistema lineal descripto para las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t) x(t) + G(t) u(t) \\ y(t) &= H(t) x(t)\end{aligned}$$

La fórmula de Lagrange permite el cálculo del movimiento del sistema arriba en el caso sea lineal, regular y a dimensiones finitas:

$$x(t) = \Phi(t) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi) G(\xi) U(\xi) d\xi$$

donde t_0 es el instante inicial.

Es claro que este cálculo necesita el conocimiento de $\Phi(t, t_0)$ nota como la matriz de transición o de monodromía. Cada columna contiene los movimientos libres relativos a condiciones iniciales particulares .

Normalmente la fórmula de Lagrange permite el cálculo del movimiento del sistema solo en los casos en los cuales la matriz de transición se puede determinar por la integración de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0) \quad \Phi(t, t_0) = I$$

Para los sistemas lineales invariables en particular, la matriz de transición es:

$$\Phi(t, t_0) = E^{F(t-t_0)} \quad 3.1$$

Entonces la fórmula de Lagrange poniendo por simplicidad $t_0 = 0$ es

$$x(t) = E^{Ft} x(0) + \int_0^t E^{F(t-\xi)} G(\xi) U(\xi) d\xi$$

El objetivo, suponiendo conocer la función descriptiva del sistema linealizado alrededor del movimiento obtenido de la precedente integración, será el de imponer que el sistema alcance la condición de régimen en un solo período T.

Considerando la función lineal en trozos, es posible determinar con la 3.1 la matriz de transición en cada trozo:

$$\Phi(t_n, t_{n-1}) = E^{F(t_n-t_{n-1})}$$

utilizando una propiedad de las matrices de transiciones que deriva desde la linealidad:

$$\Phi(t_n, t_{n-2}) = \Phi(t_n, t_{n-1}) \Phi(t_{n-1}, t_{n-2})$$

se obtiene la matriz de transición sobre todo el período: $\Phi(T, 0)$.

En la práctica, con el procedimiento descripto, disponiendo de una matriz de estado F por cada valor tabular del estado, se ha integrado un sistema lineal de tiempo variante obtenido por la linealización del original.

Por este sistema lineal, solicitado al mismo ingreso $u(\cdot)$, la fórmula de Lagrange es:

$$\delta x(t) = \Phi(t, t_0) \delta x(t_0)$$

La condición inicial que lleva a régimen el sistema linealizado en un solo período se obtiene imponiendo:

$$x(0) + \delta x(0) = x(T) + \Phi(T, 0) \delta x(0)$$

donde:

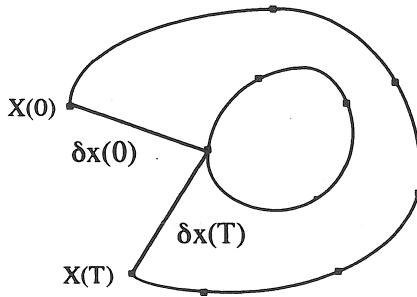
- $x(0)$ es el valor del estado inicial
- $\delta x(0)$ es la variable incógnita, es decir el incremento del estado inicial que determina la nueva inicialización.
- $x(T)$ es el valor del estado final resultado por la última integración.

$\Phi(T,0) \delta x(0)$ es la variación del estado después de un período T

entonces el nuevo estado con el cual reinicializar el sistema para ejecutar la integración sucesiva es:

$$\delta x(0) = (x(T) - x(0)) (I - \Phi(T,0))^{-1}$$

para dar una idea gráfica:



4. Herramienta utilizada

Como ya anticipado se ha utilizado el paquete software Mathematica. El tipo de herramienta de tal aplicativo resulta suficiente para tal objetivos.

Para la integración del sistema se ha usado la función RungeKutta que implementa el homónimo método para la solución de ecuaciones diferenciales. La función permite de variar el paso de integración en función de la precisión requerida.

La función ExpMatrix se ha revelado muy eficiente para el calculo de E^F donde F es la derivada con respecto al estado de la matriz de estado del sistema original.

Mathematica ademas de tener todas las características de un lenguaje de alto nivel, dispone de un conjunto de funciones de graficación muy útiles sobre todo en fase de análisis de los resultados.

5. Análisis de los resultados

El campo de variación de los dos parámetros de Amplitud y Frecuencia Angular de la forzante sinusoidal, se han elegido después de unas pruebas y en función de mostrar los casos mas significativos.

En particular para la Amplitud se han utilizado los valores: {1, 2, 4, 8}

y para la Frecuencia Angular: {0.1, 1, 5, 10, 100}.

Dado que el objetivo es de reducir el tiempo de cómputo para llegar a la condición de oscilación permanente, los parámetros observados son el número de periodos y el tiempo de cómputo necesario para lograr tal estado.

Todos los datos encontrados se han incluido en la siguientes tablas:

Frec		Amp			
		1	2	4	8
0.1	P= 5 Time= 1337	P= 4 Time= 1374	P= 5 Time= 1543	P= - Time= NoEst	
	P= 18 Time= 409	P= 16 Time= 406	P= 16 Time= 546	P= - Time= NoEst	
	P= 85 Time= 664	P= 87 Time= 797	P= 82 Time= 838	P= 85 Time= 952	
	P= 141 Time= 823	P= 133 Time= 883	P= 138 Time= 933	P= 133 Time= 1014	
	P= 446 Time= 1464	P= 1 Time= 3.5	P= 1 Time= 4.8	P= 1 Time= 5.7	

Solución Vanal

Frec		Amp			
		1	2	4	8
0.1	P= 3 Time= 914	P= 3 Time= 1086	P= 3 Time= 1358	P= - Time= NoEst	
	P= 2 Time= 58	P= 3 Time= 104	P= 3 Time= 161	P= - Time= NoEst	
	P= 2 Time= 18	P= 2 Time= 21	P= 2 Time= 23	P= 3 Time= 41	
	P= 2 Time= 13	P= 2 Time= 15	P= 2 Time= 15	P= 2 Time= 17	
	P= 2 Time= 75	P= 1 Time= 3.5	P= 1 Time= 4.9	P= 1 Time= 5.6	

Método de reinicialización mediante aproximación lineal

Confrontando los resultados de las dos tablas se pueden notar como el método de reinicialización es sin duda mucho mas eficiente de la solución banal.

Algunos datos son todavía anómalos. Las duplas Amplitud - Frecuencia Angular: $\langle 8, 0.1 \rangle$, $\langle 8, 1 \rangle$ dan resultados que son afectados por el tipo de sistema utilizado. Si la variable X_1 supera el valor de $\pi/2$ el sistema se vuelve inestable y no se pueden lograr ningún punto de oscilación permanente. A nivel intuitivo este es el caso de una forzante que lleva el péndulo a una variación tal que lo obliga a volver atrás.

Los otros datos anómalos se refieren a la ultima fila de resultados donde el movimiento forzante tiene una frecuencia angular mucho mas elevada con respecto a la frecuencia angular natural del sistema cuyo valor se encuentra al rededor de 3 radiantes por segundo. Por lo tanto en un intervalo de integración de un periodo la onda perturbadora no es prácticamente influenciada por el movimiento natural del sistema. Nuestra condición de detección de estado de oscilación permanente releva una solución supuestamente de llegada.

El tiempo total de cómputo en la región de datos consistentes, Amplitud = {1, 2, 4} y Frecuencia Angular {0.1, 1, 5, 10} es entonces:

Solución Banal 10.553 segundos

Método de reinicialización
mediante aproximación lineal 3.786 segundos

6. Conclusión y pasos sucesivos

El método denominado de la "reinicialización mediante aproximación lineal" resultó sorprendentemente eficaz respecto al método banal, reduciendo sensiblemente el tiempo de cómputo. Se concluye entonces que ésta puede ser una vía eficiente para el cálculo de la Función Descriptiva y la siguiente fase de simulación de sistemas no lineales.

Tres son los pasos que se quieren enfrentar en la línea del trabajo realizado:

1. Los valores obtenidos demuestran que existe una relación entre todos los valores con igual frecuencia angular. Es pensable una mejoría de las performance si se inicializan las computaciones a partir de resultados de régimen ya obtenidos?
2. Una segunda hipótesis que se quiere confrontar con las precedentes, es la búsqueda, en el conjunto de movimientos periódicos, de la solución del sistema; siempre bajo la acción de un ingreso sinusoidal. Se quiere llegar iterativamente a la solución a partir de un movimiento cualquiera, que sea periódico, aportando correcciones sucesivas con el fin de reducir el error.
3. Una vez comprobada la hipótesis más eficiente, se utilizarán otros tipos de herramientas computacionales para analizar la posibilidad de reducir el tiempo de llegada a las condiciones de régimen permanente.

Bibliografía

- L.A. Zadeh, C.A. Desoer *Linear System Theory* Mc Graw-Hill , 1963
R.E. Kalman, P.L. Falb *Topics in Mathematical System Theory* Mc Graw-Hill , 1969
S. Rinaldi *Teoria dei Sistemi* Clup 1977
C.L. Phillips, R.D. Harbor *Feedback Control Systems* Prentice-Hall 1991
B.C. Kuo *Sistemas de Control Automaticos* Prentice-Hall 1982
S. Wolfram *Mathematica* Addison Wesley 1988